Sélection Internationale — Session 2004
Ecole Normale Supérieure
Epreuve de culture scientifique – Informatique — Durée 4 heures

Premier Exercice

Le premier exercice comporte deux parties indépendantes.

Partie I. Rappelons que la partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Question 1.– Résoudre exactement la récurrence : $C(0) = 0$, et pour tout $n \geq 1$, $C(n) = 1 + C(\lfloor n/2 \rfloor)$.

Question 2.– Résoudre la récurrence: $C(1) = O(1)$ et pour tout $n \geq 2$, $C(n) = O(\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}\, C(\lfloor \sqrt{n} \rfloor))$.

Partie II. Rappelons que la suite $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots$ des nombres de Catalan est définie par $C_1 = 1$ et la relation de récurrence $C_n = \sum_{1 \leq i \leq n-1} C_i C_{n-i}$ pour $n \geq 2$.

Soit P un polygone convexe à $n \geq 3$ sommets. Une arête de P est un segment de droite joignant deux sommets de P. Un triangle de P est un triangle dont les sommets sont des sommets de P. Une triangulation de P est un ensemble d'arêtes de P disjointes deux-à-deux sauf éventuellement en leurs extrémités et maximal pour la relation d'inclusion. Une triangulation de P décompose son intérieur en triangles, appelés les triangles de la triangulation.

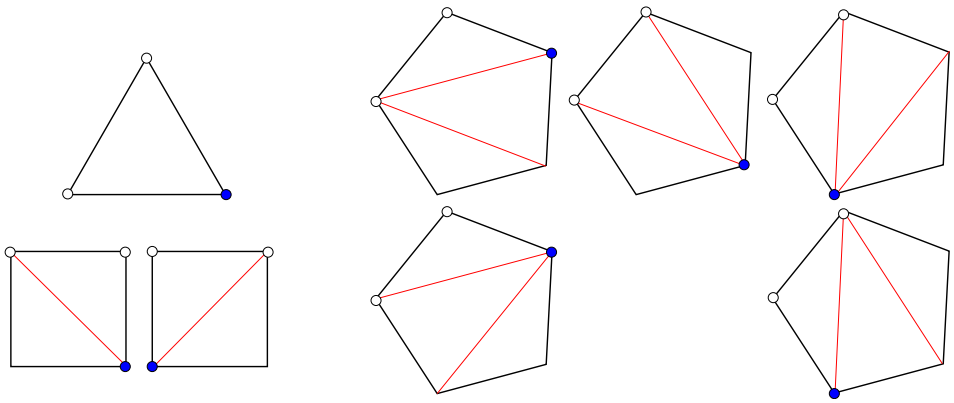

Figure 1: Les triangulations des polygones convexes à 3, 4 et 5 sommets.

Question 1.– Montrer que le nombre de triangulations de P est un nombre de Catalan.

Chaque triangle est muni d'un poids entier (élément de $\mathbb{N}$) et le poids d'une triangulation est défini comme la somme des poids de ses triangles.

Question 2.– Montrer que le poids d'une triangulation de poids minimal est calculable en temps $O(n^3)$. (Indication : On pourra numéroter les sommets du polygone de 1 à n et introduire la famille des poids des triangulations de poids minimal des polygones de sommets $i, i+1, \ldots, j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$.) Peux-t-on obtenir en temps $O(n^3)$ une triangulation de poids minimal?

Deuxième Exercice

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont considérés comme des vecteurs colonnes (ou encore comme des matrices à n lignes et une colonne) et $\mathbb{R}^n$ est muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par

$$x \leq z \iff x_i \leq z_i \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n,$$

où $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, $z = [z_1, z_2, \ldots, z_n]^T$ et T est l'opération de transposition définie sur les matrices. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est simplement noté 0.

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice à m lignes et n colonnes, soit b un vecteur colonne de $\mathbb{R}^m$ et soit $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ la matrice définie par

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \leq n; \\ 1 & \text{si } j = n + i; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

On pose
- $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, Ax \leq b\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \geq 0, Cx = b\}$ et
- $Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, y^T A \geq 0, y^T b < 0\}$.

Question 1.– Montrer que P est non vide si et seulement si S est non vide.

Pour $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_{|K|}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n+m\}$ avec $k_1 < k_2 < \cdots < k_{|K|}$ on note $C_K = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times|K|}$ la matrice définie par $\alpha_{ij} = c_{ik_j}$. De même pour $x = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ on pose $x_K = [x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{|K|}}]^T$.

Une <u>base</u> B est une partie à m éléments de $\{1, 2, \ldots, n + m\}$ telle que la matrice C_B soit inversible.

Question 2.– Montrer que $B_0 = \{n + 1, n + 2, \ldots, n + m\}$ est une base.

Question 3.– Soit B une base. Montrer que le système d'équations linéaires $Cx = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{m+n}$ est équivalent au système

$$x_B = C_B^{-1} b - C_B^{-1} C_{\overline{B}} x_{\overline{B}}, \tag{2}$$

où $\overline{B} = \{1, 2, \ldots, n+m\} \setminus B$; ce système est appelé le <u>dictionnaire</u> de la base B. Expliciter le dictionnaire associé à la base B_0.

Soit B une base de dictionnaire

$$x_i = b'_i - \sum_{j\in\overline{B}} a'_{ij} x_j, \qquad (i \in B).$$

On note I l'ensemble des indices $i \in B$ tels que $b'_i < 0$ et $J(i)$ l'ensemble des indices $j \in \overline{B}$ tels que $a'_{ij} < 0$. Si $I \neq \emptyset$ on note i_* son plus petit élément et si $J(i_*) \neq \emptyset$ on note j_* son plus petit élément. Finalement si $I \neq \emptyset$ et $J(i_*) \neq \emptyset$ on pose $\varphi(B) = (B \setminus \{i_*\}) \cup \{j_*\}$; sinon on pose $\varphi(B) = B$.

Question 4.– Calculer les dictionnaires associés aux bases $B_0, \varphi(B_0), \varphi^2(B_0), \ldots$ dans les cas

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & +1 \\ +1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & +23 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix}.$$

(On ne demande pas de calculer les matrices $C_{B_0}, C_{\varphi(B_0)}, \ldots$ ou leurs inverses.)

Question 5.– Montrer que si $B = \varphi(B)$ alors (i) P est non vide ou (ii) P est vide et Q est non vide. Expliciter un élément de P ou de Q en fonction des coefficients du dictionnaire.

Question 6.– Montrer que si $B \neq \varphi(B)$ alors

1. $\varphi(B)$ est une base;
2. Pour tout $k \geq 1$ on a $B \neq \varphi^k(B)$. (Indication : raisonner par l'absurde et commencer par examiner le cas où $n+m \in B$ et $n+m \notin \varphi^l(B)$ pour un certain l.)

En déduire que la suite $B, \varphi(B), \varphi^2(B), \ldots$ est stationnaire.

Question 7.– Montrer que P est vide si et seulement si Q est non vide.

Troisième Exercice

Exercice conseillé aux candidats de la discipline secondaire

Un hypergraphe est une paire (X, R) formée d'un ensemble X et d'un sous-ensemble R de l'ensemble 2^X des parties de X.

Soit (X, R) un hypergraphe. Un sous-ensemble A de X est dit séparable si $R_{|_A} = \{r \cap A \mid r \in R\}$ coincide avec l'ensemble 2^A des parties de A. La dimension de (X, R) est la borne supérieure de l'ensemble des cardinaux des sous-ensembles finis séparables de X. Le cardinal d'un ensemble fini A est noté $|A|$.

Rappelons que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini comme le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. On admet sans preuve que $\sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} \leq (\frac{en}{d})^d$ pour tout $n \geq d \geq 1$.

Question 1.– Quelle est la dimension de l'hypergraphe des demi-espaces de $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3, \ldots$?

Soit $\Phi_d(n)$ la suite double définie pour $n \geq 0$ et $d \geq 0$ par

$$\begin{cases} \Phi_0(n) &= 1 & (n \geq 0), \\ \Phi_d(0) &= 1 & (d \geq 0), \\ \Phi_d(n) &= \Phi_d(n-1) + \Phi_{d-1}(n-1) & (d, n \geq 1). \end{cases}$$

Question 2.– Montrer que $\Phi_d(n) = \sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k}$.

Soit A un sous-ensemble fini de X. On suppose maintenant que (X, R) est de dimension finie d.

Question 3.– Montrer que le nombre d'éléments de $R_{|_A}$ est au plus $\Phi_d(|A|)$.

Question 4.– Soit $R' = \{F(r_1, r_2, \ldots, r_k) \mid r_i \in R\}$ où $F(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est une expression ensembliste fixe utilisant les opérations d'union, intersection et différence sur les variables ensemblistes $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Montrer que la dimension de l'hypergraphe (X, R') est un $O(kd \ln ek)$.

Soit $0 < \epsilon < 1$ un réel. Un sous-ensemble N de A est appelé un ϵ-net de A pour (X, R) si

$$\forall r \in R, \qquad |r \cap A| \geq \epsilon |A| \implies r \cap N \neq \emptyset.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$ et pour $z = z_1 z_2 \ldots z_m \in A^m$ on pose $N(z) = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$.

Question 5.– Soit z un élément aléatoire de A^m (pour la mesure uniforme sur A^m). Montrer que $N(z)$ est un ϵ-net de A avec probabilité supérieure ou égale à $1 - \Phi_d(|A|)e^{-\epsilon m}$. En déduire que si $m \geq \frac{d}{\epsilon} \ln \frac{e|A|}{d}$ l'ensemble $N(z)$ est un ϵ-net avec probabilité non nulle.

Sélection Internationale — Session 2004
Ecole Normale Supérieure
Epreuve de culture scientifique – Informatique — Durée 4 heures

First Exercice

The first exercice is composed of two independant parts.

Part I. Recall that the floor of a real number x, written $\lfloor x \rfloor$, is the greatest integer not exceeding x.

Question 1.– Solve exactly the recurrence: $C(0) = 0$, and for all $n \geq 1$, $C(n) = 1 + C(\lfloor n/2 \rfloor)$.

Question 2.– Solve the recurrence $C(1) = O(1)$ and for all $n \geq 2$, $C(n) = O(\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}\, C(\lfloor \sqrt{n} \rfloor))$.

Part II. Recall that the sequence $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots$ of Catalan numbers is defined by $C_1 = 1$ and the recurrence relation $C_n = \sum_{1 \leq i \leq n-1} C_i C_{n-i}$ for $n \geq 2$.

Let P be a convex polygon with $n \geq 3$ vertices. An edge of P is a line segment joining two vertices of P. A triangle of P is a triangle whose vertices are vertices of P. A triangulation of P is a set of edges of P pairwise disjoint except possibly at their endpoints and maximal for the inclusion relation. A triangulation of P decomposes its interior into triangles, called the triangles of the triangulation.

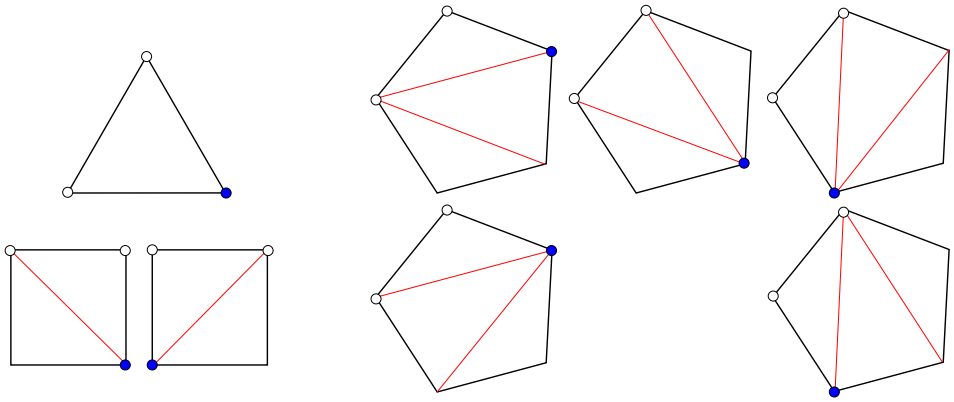

Figure 2: The triangulations of convex polygons with 3, 4 and 5 vertices.

Question 1.– Show that the number of triangulations of P is a Catalan number.

Each triangle is associated with an integer weight, and the weight of a triangulation is defined to be the sum of the weights of its triangles.

Question 2.– Show that the weight of a triangulation with minimal weight is computable in time $O(n^3)$. (Hint: number the vertices of the polygon from 1 to n and introduce the family of weights of the triangulations with minimal weight of the polygons with vertices $i, i+1, \ldots, j$ for $1 \leq i \leq j \leq n$.) Is it possible to obtain not only the minimal weight but a triangulation with minimal weight in time $O(n^3)$?

Second Exercice

The vectors of $\mathbb{R}^n$ are considered as column vectors (or equivalently as matrices with n rows and one column), and $\mathbb{R}^n$ is equipped with the partial order $\leq$ defined by

$$x \leq z \iff x_i \leq z_i \text{ for all } i = 1, 2, \ldots, n,$$

where $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, $z = [z_1, z_2, \ldots, z_n]^T$ and T is the operation of transposition defined on matrices. The nul vector of $\mathbb{R}^n$ is simply denoted 0.

Let $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ be a matrix with m rows and n columns, b be a column vector of $\mathbb{R}^m$, and let $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ be the matrix defined by

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{if } j \leq n; \\ 1 & \text{if } j = n + i; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

We set
- $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, Ax \leq b\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \geq 0, Cx = b\}$, and
- $Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, y^T A \geq 0, y^T b < 0\}$.

Question 1.– Show that P is nonempty if and only if S is nonempty.

For $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_{|K|}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n + m\}$ with $k_1 < k_2 < \cdots < k_{|K|}$ we denote by $C_K = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times |K|}$ the matrix defined by $\alpha_{ij} = c_{ik_j}$. Similarly for $x = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ we set $x_K = [x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{|K|}}]^T$.

A <u>basis</u> B is an m-element subset of $\{1, 2, \ldots, n + m\}$ such that the matrix C_B is nonsingular.

Question 2.– Prove that $B_0 = \{n + 1, n + 2, \ldots, n + m\}$ is a basis.

Question 3.– Let B be a basis. Show that the system of linear equations $Cx = b$ with unknown $x \in \mathbb{R}^{m+n}$ is equivalent to the system

$$x_B = C_B^{-1} b - C_B^{-1} C_{\overline{B}} x_{\overline{B}}, \tag{2}$$

where $\overline{B} = \{1, 2, \ldots, n+m\} \setminus B$; this last system is called the <u>dictionnary</u> of the basis B. What is the dictionnary of the basis B_0?

Let B be a basis with dictionnary

$$x_i = b'_i - \sum_{j \in \overline{B}} a'_{ij} x_j, \qquad (i \in B).$$

We denote by I the subset of indexes $i \in B$ such that $b'_i < 0$ and $J(i)$ the subset of indices $j \in \overline{B}$ such that $a'_{ij} < 0$. If $I \neq \emptyset$ we denote by i_* its smallest element and if $J(i_*) \neq \emptyset$ we denote by j_* its smallest element. Finally if $I \neq \emptyset$ and $J(i_*) \neq \emptyset$ we set $\varphi(B) = (B \setminus \{i_*\}) \cup \{j_*\}$; otherwise we set $\varphi(B) = B$.

Question 4.– Compute the dictionnaries associated with the basis $B_0, \varphi(B_0), \varphi^2(B_0), \ldots$ in the two following cases

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & +1 \\ +1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & +23 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix}.$$

(You are not asked to compute the matrices $C_{B_0}, C_{\varphi(B_0)}, \ldots$ or their inverses.)

Question 5.– Show that if $B = \varphi(B)$ then (i) P is nonempty or (ii) P is empty and Q is nonempty. Write down an explicit element of P or of Q in terms of the entries of the dictionnary.

Question 6.– Show that if $B \neq \varphi(B)$ then

1. $\varphi(B)$ is a basis;
2. For all $k \geq 1$ one has $B \neq \varphi^k(B)$. (Hint: prove by contradiction and first examine the case where $n+m \in B$ and $n+m \notin \varphi^l(B)$ for some l.)

Deduce that the sequence $B, \varphi(B), \varphi^2(B), \ldots$ is stationnary.

Question 7.– Prove that P is empty if and only if Q is nonempty.

Third Exercice

Exercice recommended to the candidates of the subsidiary subject

---

A set system is an ordered pair (X, R) where X is a set and where R is a subset of the set 2^X of subsets of X.

Let (X, R) be a set system. A subset A of X is said shattered by R if $R_{|_A} = \{r \cap A \mid r \in R\}$ coincides with the set 2^A of subsets of A. The dimension of (X, R) is the supremum of the sizes of all finite shattered subsets of X. The size of a finite set A is denoted $|A|$.

Recall that the binomial coefficient $\binom{n}{k}$ is defined to be the number of k-element subsets of a set of n elements. We admit without proof that $\sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} \leq (\frac{en}{d})^d$ for all $n \geq d \geq 1$.

Question 1.– What is the dimension of the set system of half-spaces of $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3, \ldots$?

Let $\Phi_d(n)$ be the double indexed sequence defined for all $n \geq 0$ and $d \geq 0$ by

$$\begin{cases} \Phi_0(n) &= 1 & (n \geq 0), \\ \Phi_d(0) &= 1 & (d \geq 0), \\ \Phi_d(n) &= \Phi_d(n-1) + \Phi_{d-1}(n-1) & (d, n \geq 1). \end{cases}$$

Question 2.– Show that $\Phi_d(n) = \sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k}$.

Let A be a finite subset of X, and assume now that (X, R) has finite dimension d.

Question 3.– Show that the number of elements of $R_{|_A}$ is at most $\Phi_d(|A|)$.

Question 4.– Let $R' = \{F(r_1, r_2, \ldots, r_k) \mid r_i \in R\}$ where $F(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ is a fixed set-theoretic expression using the operations of union, intersection, and difference with variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$ standing for sets. Prove that the dimension of the set system (X, R') is a $O(kd \ln ek)$.

Let $0 < \epsilon < 1$ be a real number. A subset N of A is called an ϵ-net of A for (X, R) if

$$\forall r \in R, \qquad |r \cap A| \geq \epsilon |A| \implies r \cap N \neq \emptyset.$$

For $m \in \mathbb{N}$ and for $z = z_1 z_2 \ldots z_m \in A^m$ we set $N(z) = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$.

Question 5.– Let z be a random element of A^m (for the uniform mesure on A^m). Prove that $N(z)$ is an ϵ-net of A with probability at least $1 - \Phi_d(|A|)e^{-\epsilon m}$. Deduce that if $m \geq \frac{d}{\epsilon} \ln \frac{e|A|}{d}$ the set $N(z)$ is an ϵ-net with nonnull probability.